.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola strojnická Olomouc, tř.17. listopadu 49

Výukový materiál zpracovaný v rámci projektu „Výuka moderně“
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0205

Šablona: III/2 Přírodovědné předměty
Sada: 3 Matematika **Číslo materiálu v sadě: 7**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Název: Kvadratická rovnice

Jméno autora: Ondřej Holpuch

Předmět: matematika

Jazyk: český

Klíčová slova: nerovnice, diskuse

Cílová skupina: žáci 1. ročníku SOŠ

Stupeň a typ vzdělání: 1. stupeň, SOŠ

Metodický list/anotace

Tento digitální učební materiál slouží jako průvodce řešením kvadratických rovnic. S jeho pomocí učitel provede žáky metodou řešení obecného případu kvadratické rovnice a také případů speciálních. Spolu s žáky vyřeší příklady úloh. Na závěr žáci již samostatně řeší vybrané kvadratické rovnice popsanými metodami.

Datum vytvoření: 25.11. 2012

Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice v základním tvaru

► **Kvadratickou rovnicí** rozumíme každou rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru:

$$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$$

základní tvar
kvadratické rovnice

kde konstanty $a, b, c \in R$ jsou tzv. **koeficienty** kvadratické rovnice a proměnná x je tzv. **neznámá**. Aby šlo skutečně o rovnici kvadratickou, musí se v ní vyskytovat neznámá ve 2. mocnině a musí tedy platit: $a \neq 0$

Příklady:

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ je kvadratická rovnice o neznámé x s koeficienty:

$a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = -3$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ je kvadratická rovnice o neznámé x s koeficienty:

$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 2$

$4x^2 - 1 = 0$ je *ryze kvadratická* rovnice o neznámé x s koeficienty:

$a = 4 \qquad b = 0 \qquad c = -1$

Kořeny kvadratické rovnice

- Kořenem kvadratické rovnice je každé reálné číslo, které po dosazení za neznámou x vyhovuje rovnici. Rovnice tím přejde v číselnou rovnost.

Například:

$x^2 - 3x + 2 = 0$ Kořeny této rovnice jsou čísla 1 a 2:

$1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$

$-2 + 2 = 0$ → číselná rovnost ✓

$2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$

$4 - 6 + 2 = 0$ → číselná rovnost ✓

Řešení a počet kořenů kvadratické rovnice

- Řešit kvadratickou rovnici znamená **vypočítat její kořen(y)**.
- Reálné kořeny kvadratické rovnice mohou být až 2. *!!*
- Skutečný počet reálných kořenů zjistíme už v průběhu řešení rovnice.
- **Metoda řešení** závisí na typu kvadratické rovnice. *!!*

Jednotlivé případy kvadratických rovnic

- Nejprve ekvivalentními úpravami rovnici převedeme na základní tvar. Podle podoby rovnice v základním tvaru rozlišujeme **3 případy kvadratické rovnice**:

Obecný případ	$ax^2+bx+c=0$	
Rovnice bez absolutního členu c	$ax^2+bx=0$	$c=0$
Ryze kvadratická rovnice	$ax^2+c=0$	$b=0$

Každý z těchto 3 případů se řeší jinou metodou.

Řešení obecného případu kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

- Obecný případ kvadratické rovnice řešíme výpočtem tzv. diskriminantu D a následným užitím vzorce pro výpočet kořenů.

Nejprve určíme hodnotu diskriminantu D podle vzorce:

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

Hodnota diskriminatu nám prozradí, kolik reálných kořenů rovnice má:

$D > 0$ – 2 různé reálné kořeny

$D = 0$ – 1 reálný kořen, tzv. „dvojnásobný“

$D < 0$ – reálný kořen neexistuje

Jestliže kořeny existují, vypočítáme je podle tohoto vztahu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Příklad 1

Řešme v **R** kvadratickou rovnici: $x^2 + 3x - 4 = 0$

Řešení

Jde o obecný případ kvadratické rovnice. Nejdříve vypíšeme koeficienty:

$$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = -4$$

Vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = \underline{\underline{25}}$$

Diskriminant je kladné číslo, proto má naše rovnice 2 různé reálné kořeny. Určíme je:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+5}{2} = \underline{1} \\[2ex] \dfrac{-3-5}{2} = \underline{-4} \end{cases}$$

Závěr

Množina kořenů naší rovnice je: $\underline{\underline{P = \{1; -4\}}}$

Příklad 2

Řešme v **R** kvadratickou rovnici: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Řešení

Jde opět o obecný případ kvadratické rovnice. Nejdříve vypíšeme koeficienty:

$$a = 4 \qquad b = -4 \qquad c = 1$$

Vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = \underline{0}$$

Diskriminant je roven nule, proto má naše rovnice 1 tzv „dvojnásobný" reálný kořen. Ten určíme užitím vztahu:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \underline{\frac{1}{2}}$$

Závěr

Množina kořenů naší rovnice je: $\underline{\underline{P = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}}$

Poznámka

Vzorec pro výpočet kořenů $x_{1,2}$ jsme mohli použít i v tomto případě. Vzorec automaticky přejde ve výpočet „dvojnásobného" kořene.

Příklad 3

Řešme v **R** kvadratickou rovnici: $2x^2 - x + 2 = 0$

Řešení

Jde opět o obecný případ kvadratické rovnice. Vypíšeme koeficienty:

$$a = 2 \qquad b = -1 \qquad c = 2$$

Vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = \underline{-15}$$

Diskriminant je záporný, proto naše rovnice žádný reálný kořen nemá. Rovnice nemá řešení v oboru **R**.

Závěr

Množina kořenů naší rovnice je prázdná:

$$\underline{\underline{P = \emptyset}}$$

Poznámka

Kdybychom přesto chtěli použít vztah pro výpočet $x_{1,2}$, dostali bychom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-15}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4} \qquad !!$$

Druhá odmocnina ze záporného čísla však v oboru **R** nemá smysl.

Řešení kvadratické rovnice bez absolutního členu c $\quad ax^2 + bx = 0$

- Vyřešit tento případ je velmi snadné.

Nejprve vytkneme neznámou x:

$$ax^2 + bx = 0 \qquad x \cdot (ax + b) = 0$$

Uvedená rovnost je splněna právě tehdy, když je $x = 0$ nebo $ax + b = 0$.

Tím tedy získáváme kořeny rovnice:

$$\boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Příklad 3

Řešme v **R** kvadratickou rovnici: $4x^2 - x = 0$

Řešení

Vytkneme: $x \cdot (4x - 1) = 0$

Kořeny jsou následující:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{4}$$

Množina kořenů naší rovnice:

$$P = \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$$

Řešení ryze kvadratické rovnice $ax^2 + c = 0$

- Vyřešit tento případ je vůbec nejsnadnější.

Nejprve vyjádříme x^2:

$$ax^2 + c = 0 \qquad x^2 = \frac{-c}{a}$$

Nyní odmocníme. Nezapomínáme, že druhá odmocnina z kladného čísla dává 2 výsledky lišící se znaménkem.

$$\boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$$

Příklad 4

Řešme v **R** kvadratickou rovnici: $4x^2 - 1 = 0$

Řešení

Vyjádříme x^2: $x^2 = \frac{1}{4}$

Odmocníme a zapíšeme kořeny:

$\underline{x_1 = 0{,}5}$ $\underline{x_2 = -0{,}5}$

Množina kořenů naší rovnice:

$\underline{\underline{P = \{\pm 0{,}5\}}}$

Úlohy k samostatnému řešení

$x^2 + 9x - 10 = 0$ $[P = \{1; -10\}]$

$2x^2 - 9x + 10 = 0$ $[P = \{2{,}5; -10\}]$

$6x^2 + x - 1 = 0$ $\left[P = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right\}\right]$

$x^2 + 2x - 4 = 0$ $[P = \{-1 \pm \sqrt{5}\}]$

$36x^2 - 12x + 1 = 0$ $\left[P = \left\{\frac{1}{6}\right\}\right]$

$1000x^2 - 3x = 0$ $[P = \{0; 0{,}003\}]$

$1000x^2 - 9 = 0$ $[P = \{\pm 0{,}03\}]$

$1000x^2 + 9 = 0$ $[P = \emptyset]$

Odkazy: