



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola strojnická Olomouc, tř.17. listopadu 49

**Výukový materiál zpracovaný v rámci projektu „Výuka moderně“
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0205**

Šablona: III/2 Přírodovědné předměty

Sada: 3 Matematika

Číslo materiálu v sadě: 15

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Název: Iracionální rovnice

Jméno autora: Mgr. Jana Masaryková

Předmět: matematika

Jazyk: čeština

Klíčová slova: iracionální rovnice, odmocnina, zkouška, neekvivalentní úpravy

Cílová skupina: žák

Stupeň a typ vzdělání: odborné vzdělání

Očekávaný výstup: pozná a umí řešit iracionální rovnice

Metodický list/anotace

Vytvořeno: 9.11. 2012

Prezentace je zaměřena na řešení iracionálních rovnic, je vhodná k přímé výuce i samostudiu.

Iracionální rovnice

Iracionální rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$ jsou rovnice, které obsahují odmocniny z výrazů s neznámou tj. neznámá se vyskytuje pod odmocninou.

$$\text{např. } x - 1 = \sqrt{x + 11}$$

Oborem řešení je pak podmnožina množiny \mathbb{R}

Řešení iracionálních rovnic provádíme tak, že obě strany rovnice
UMOCNÍME

POZOR:

V průběhu řešení provádíme **neekvivalentní úpravy** (umocňování obou stran rovnice), proto nutnou součástí řešení je **zkouška dosazením do původní rovnice**

Příklady

1) Řešte v \mathbb{R} iracionální rovnici $x - 1 = \sqrt{x + 11}$

Jak budeme postupovat?

Řešení

obě strany rovnice umocníme:

$$x - 1 = \sqrt{x + 11} \quad /^2$$

$$(x - 1)^2 = x + 11$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 11$$

dostáváme kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \longrightarrow$$

$$x_1 = 5, x_2 = -2$$

provedeme zkoušku, která je součástí řešení:

$$L(5) = 5 - 1 = 4 \quad P(5) = \sqrt{5 + 11} = \sqrt{16} = 4 \longrightarrow L(5) = P(5)$$

$$L(-2) = -2 - 1 = -3 \quad P(-2) = \sqrt{-2 + 11} = \sqrt{9} = 3 \longrightarrow L(-2) \neq P(-2)$$

$$K = \{5\}$$

2) Řešte v \mathbb{R} iracionální rovnici $x + \sqrt{x+2} = 4$

Jak budeme postupovat?

Řešení

nejprve převedeme neznámou x na druhou stranu rovnice a teprve potom umocníme:

$$x + \sqrt{x+2} = 4 \longrightarrow \sqrt{x+2} = 4 - x \quad |^2$$

$$x + 2 = (4 - x)^2$$

$$x + 2 = 16 - 8x + x^2$$

dostáváme kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 7, x_2 = 2$$

provedeme zkoušku:

$$L(7) = 7 + \sqrt{7+2} = 7 + 3 = 10 \quad P(7) = 4 \longrightarrow L(7) \neq P(7)$$

$$P(2) = 2 + \sqrt{2+2} = 2 + 2 = 4 \quad P(2) = 4 \longrightarrow L(2) = P(2)$$

$$K = \{ 2 \}$$

3) Řešte v \mathbb{R} iracionální rovnici $\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} = 0$

Jak budeme postupovat?

Řešení

nejprve převedeme jednu z odmocnin na druhou stranu rovnice a
teprve potom umocníme:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{x+5} = \sqrt{x^2-7} \quad |^2$$
$$x + 5 = x^2 - 7$$

dostáváme kvadratickou rovnici:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

provedeme zkoušku:

$$L(4) = \sqrt{4+5} - \sqrt{4^2-7} = \sqrt{9} - \sqrt{16-7} = 3 - 3 = 0 \quad P(4) = 0 \quad L(4) = P(4)$$

$$P(-3) = \sqrt{-3+5} - \sqrt{(-3)^2-7} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \quad P(-3) = 0 \quad L(-3) = P(-3)$$

$$K = \{ -3, 4 \}$$

4) Řešte v \mathbb{R} iracionální rovnici $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$

Jak budeme postupovat?

Řešení

obě strany rovnice umocníme

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5 \quad /^2$$

$$x-1 + 2\sqrt{(x-1)(x+4)} + x+4 = 25$$

upravíme tak, aby na jedné straně rovnice byla pouze odmocnina

$$2x+3 + 2\sqrt{(x-1)(x+4)} = 25 \quad / -3$$

$$2x+2\sqrt{(x-1)(x+4)} = 22 \quad / :2, -x$$

$$\sqrt{(x-1)(x+4)} = 11-x \quad /^2$$

$$(x-1)(x+4) = 121 - 2x + x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 121 - 2x + x^2$$

$$25x = 125$$

$$x = 5$$

$$\text{Zkouška: } L(5) = \sqrt{5-1} + \sqrt{5+4} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

$$P(5) = 5 \longrightarrow L(5) = P(5)$$

$$K = \{5\}$$

Odkazy:

- POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha : Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8. s. 608.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-099-3.