INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola strojnická Olomouc, tř.17. listopadu 49

Výukový materiál zpracovaný v rámci projektu „Výuka moderně“
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0205

Šablona: III/2 Přírodovědné předměty

Sada: 3 Matematika **Číslo materiálu v sadě: 16**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Název: Trojúhelník

Jméno autora: Mgr. Jana Masaryková

Předmět: matematika

Jazyk: čeština

Klíčová slova: trojúhelník, střední příčka, výška, těžnice, úhel, obsah, obvod

Cílová skupina: žák

Stupeň a typ vzdělání: odborné vzdělání

Očekávaný výstup: Pozná různé typy trojúhelníku a umí vypočítat jejich obsah

Metodický list/anotace

Vytvořeno dne 26.11.2012

Prezentace je zaměřena na rozdělení trojúhelníků a výpočet jejich obsahu, je vhodná k přímé výuce i samostudiu.

Trojúhelník

Mějme dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce, pak **TROJÚHELNÍK** je průnik polorovin ABC,BCA, CBA

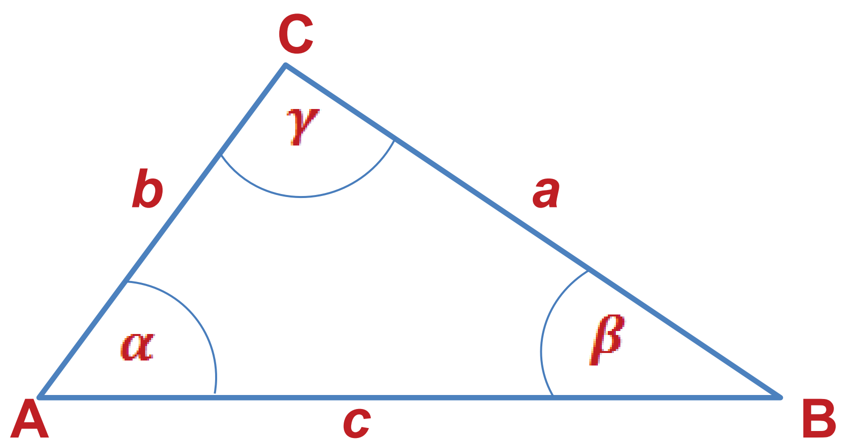
ozn. **Δ ABC**

Body A,B,C nazýváme **vrcholy trojúhelníku**

Úsečky AB, BC,CA nazýváme **strany trojúhelníku**

Konvexní úhly ∢BAC,∢ ABC,∢BCA **vnitřní úhly** při vrcholech A,B,C

Vedlejší úhly k vnitřním úhlům nazýváme **vnější úhly trojúhelníka**



Vlastnosti trojúhelníku

V každém trojúhelníku platí následující věty:

V1: součet libovolných dvou stran trojúhelníku je větší než třetí strana tj. platí trojúhelníkové nerovnosti:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

V2: Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel.

Pro délky stran a velikosti vnitřních úhlů tedy platí:

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta \qquad a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta \qquad \text{atd.}$$

V3: Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

V4: Vnější úhel trojúhelníku při kterémkoliv vrcholu je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících dvou vrcholech:

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \beta' = \alpha + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

Jaké druhy trojúhelníků známe?

Klasifikace trojúhelníků

podle stran

- **různostranné** (žádné dvě strany Δ nejsou shodné)
- **rovnoramenné** (právě dvě strany Δ jsou shodné)
- **rovnostranné** (všechny strany Δ jsou shodné)

podle úhlů

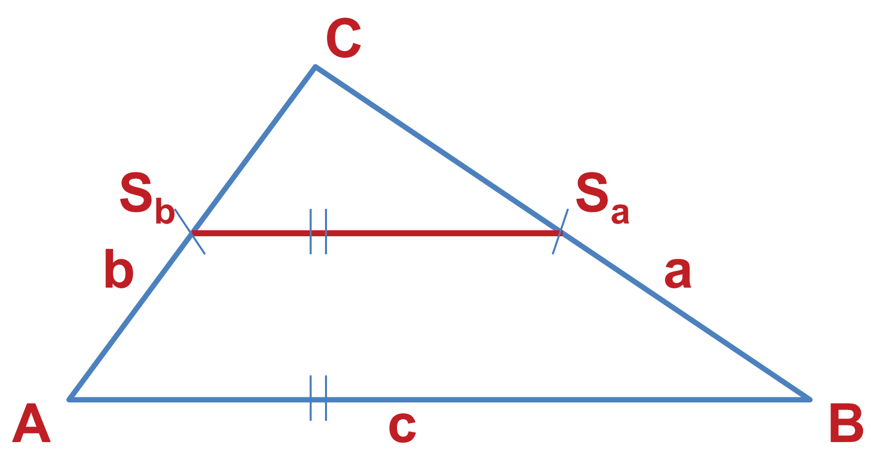
- **ostroúhlé** (všechny vnitřní $\sphericalangle$ jsou ostré)
- **pravoúhlé** (právě jeden vnitřní $\sphericalangle$ je pravý)
- **tupoúhlé** (právě jeden vnitřní $\sphericalangle$ je tupý)

Jaké důležité body a úsečky trojúhelníku známe?

Důležité body a úsečky trojúhelníku

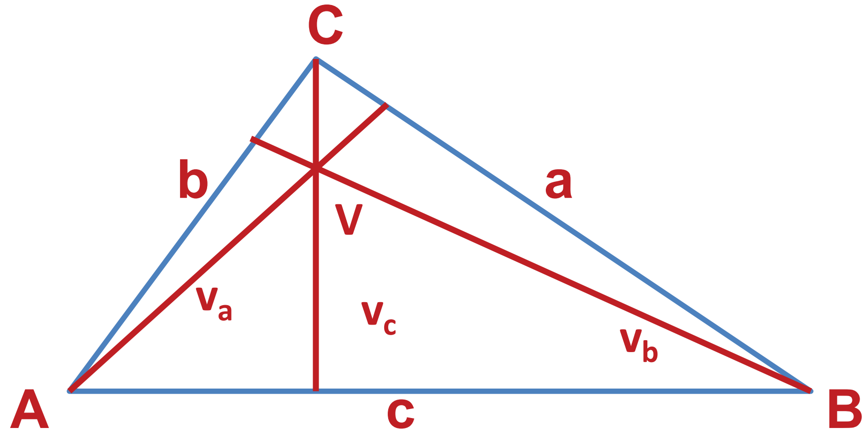
1) **Střední příčka -** je úsečka spojující středy dvou protějších stran trojúhelníku a je rovnoběžná s třetí stranou

délka střední příčky je pak rovna polovině délky této třetí strany



2) **Výška -** je úsečka která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené tímto vrcholem k jeho protější straně

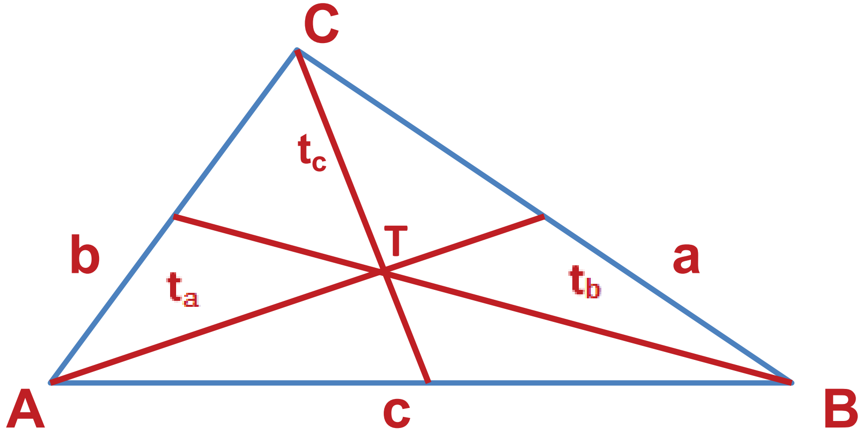
Všechny tři přímky, na kterých leží výšky trojúhelníku, se protínají v jediném bodě V nazvaném průsečík výšek (ortocentrum)



3) **Těžnice -** úsečka která spojuje vrchol trojúhelníku se středem protější strany

Všechny tři těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě **T** zvaném **těžiště trojúhelníku**

Vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna $\frac{2}{3}$ délky příslušné těžnice



Obsah a obvod trojúhelníka

$$S = \frac{1}{2}\, a \cdot v_a \qquad S = \frac{1}{2}\, b \cdot v_b \qquad S = \frac{1}{2}\, c \cdot v_c$$

$$S = \frac{1}{2}\, bc \cdot \sin\alpha \qquad S = \frac{1}{2}\, ac \cdot \sin\beta \qquad S = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma$$

Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,, \qquad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$o = a + b + c$$

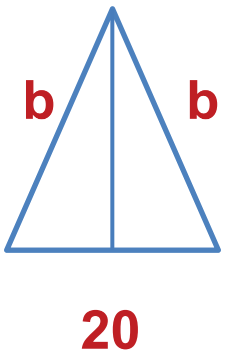
Příklady

1) Základna rovnoramenného trojúhelníku je 20 cm, obsah 240 cm^2. Vypočítejte obvod tohoto trojúhelníku.

Jak budeme postupovat?

Řešení

a = 20 cm, S = 240 cm^2



využijeme Heronova vzorce: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ dosadíme za *s*

$$s = \frac{b+b+20}{2} = \frac{2b+20}{2} = b + 10$$

dosadíme do Heronova vzorce a vypočítáme stranu *b*

$$240 = \sqrt{(b+10)(\cancel{b}+10-\cancel{b})(\cancel{b}+10-\cancel{b})(b+10-20)}$$

$$240 = \sqrt{(b+10)10 \cdot 10(b-10)} \longrightarrow 240 = 10\sqrt{(b^2-100)}$$

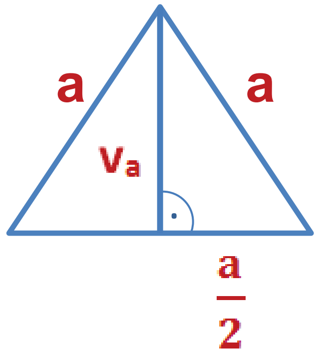
$$24^2 = b^2 - 100 \longrightarrow b = 26 \text{ cm}$$

Obvod: o = 26 + 26 + 20 = 72 cm

3) **Vypočítejte stranu a rovnostranného trojúhelníku, je-li jeho obsah 1732 cm^2.**

Jak budeme postupovat?

Řešení



$$S = 1732\ cm^2$$

pomocí Pythagorovy věty vyjádříme výšku v_a:

$$v_a^2 = a^2 - \frac{a}{2})^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$v_a^2 = \frac{3}{4}\ a^2 \longrightarrow v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}\ a$$

nyní dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu $S = \frac{1}{2}\ a \cdot v_a$

$$1732 = \frac{1}{2}\ a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ a \quad / \cdot 4$$

$$6928 = \sqrt{3} \cdot a^2$$

$$a \cong 63{,}24\ cm$$

3) **Vypočítejte obsah S a výšky v_a , v_b , v_c trojúhelníku ABC o stranách a = 8 cm, b = 11 cm, c = 12 cm.**

Jak budeme postupovat?

Řešení

a = 8 cm, b = 11cm, c = 12 cm

dosadíme do Heronova vzorce: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$s = \frac{8+11+12}{2} = \frac{31}{2} = 15{,}5 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{15{,}5 \cdot (15{,}5-8)(15{,}5-11)(15{,}5-12)} =$$

$$= \sqrt{15{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}5} \cong 42{,}8 \text{ cm}^2$$

pro výpočet výšky použijeme vzorec: $S = \frac{1}{2}\, a \cdot v_a \longrightarrow v_a = \frac{2\,S}{a}$

dosadíme: $v_a = \dfrac{2 \cdot 42{,}8}{8} \cong 10{,}7 \text{ cm}$

analogicky: $v_b = \dfrac{2 \cdot 42{,}8}{11} \cong 7{,}78 \text{ cm}$ $\quad v_c = \dfrac{2 \cdot 42{,}8}{12} \cong 7{,}1\overline{3} \text{ cm}$

Odkazy:

- POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha : Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8. s. 608.
- JIRÁSEK, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU 1. část.* Dotisk 5. vydání.Praha : Prométheus, 1986. ISBN 80-85849-55-0 (*D)