INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola strojnická Olomouc, tř.17. listopadu 49

Výukový materiál zpracovaný v rámci projektu „Výuka moderně“
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0205

Šablona: III/2 Přírodovědné předměty

Sada: 3 Matematika **Číslo materiálu v sadě: 18**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Název: Goniometrické vzorce a jejich úpravy

Jméno autora: Mgr. Jana Masaryková

Předmět: matematika

Jazyk: čeština

Klíčová slova: goniometrické vzorce, sinus, kosinus, tangens, kotangens, argument, jednotková kružnice

Cílová skupina: žák

Stupeň a typ vzdělání: odborné vzdělání

Očekávaný výstup: Umí použít a upravit goniometrické vzorce a určit hodnoty goniometrických funkcí pomocí těchto vzorců

Metodický list/anotace

Vytvořeno: 7.12. 2012

Prezentace je zaměřená na úpravu goniometrických vzorců a určování hodnot goniometrických funkcí pomocí těchto vzorců.

Je určená k přímé výuce i samostudiu.

Goniometrické vzorce a jejich úpravy

Vzorce pro goniometrické funkce můžeme rozdělit do několika kategorií

Základní vzorce - vztahy mezi funkcemi téhož argumentu, $\forall\, x \in R$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$	
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	
$\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in Z$
$\mathrm{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$	$x \neq k\,\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$
$1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in Z$
$1 + \mathrm{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$

Vzorce pro funkce dvojnásobného argumentu

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Vzorce pro funkce polovičního argumentu

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Hodnoty funkcí záporného argumentu

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$$

$$\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}\, x$$

Součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus

$\forall\, x, y \in R$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Vzorce pro součet a rozdíl hodnot funkcí sinus a kosinus

$\forall\, x, y \in R$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Příklady

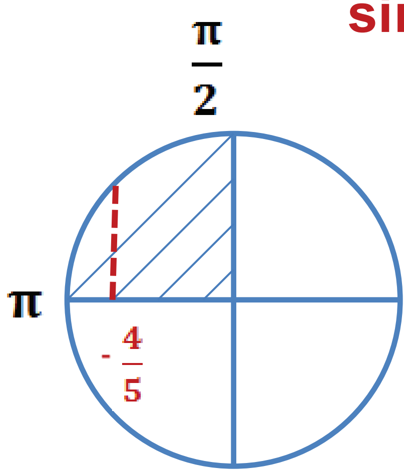
1) Bez výpočtu velikosti úhlu $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, jestliže znáte $\sin x = \frac{3}{5}$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Využijeme vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin x = \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$



$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\cos x = \pm \frac{4}{5}$$

Výsledek určíme pomocí jednotkové kružnici, pro daný interval vyhovuje:

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \mathrm{tg}\, x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ $\quad$ $\mathrm{cotg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x} \longrightarrow \mathrm{cotg}\, x = -\frac{4}{3}$

$\mathrm{tg}\, x = -\frac{3}{4}$ $\quad$ $\mathrm{cotg}\, x = -\frac{4}{3}$

2) **Bez výpočtu velikosti úhlu $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, jestliže znáte $\cot x = -2$**

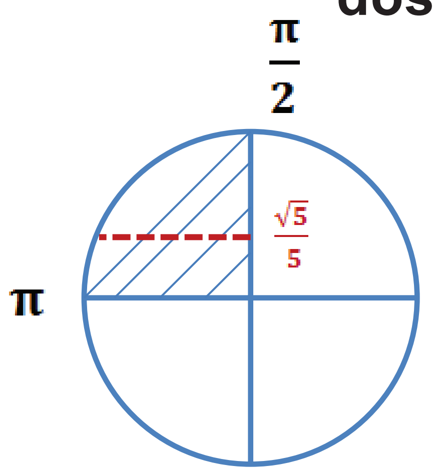
Jak budeme postupovat?

Řešení

Využijeme následujících vztahů: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

dosadíme

$$\frac{\cos x}{\sin x} = -2 \longrightarrow \cos x = -2 \sin x$$



$$\sin^2 x + (-2 \sin x)^2 = 1$$
$$\sin^2 x + 4 \sin^2 x = 1$$
$$5 \sin^2 x = 1$$
$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Výsledek určíme pomocí jednotkové kružnici

pro daný interval vyhovuje: $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$$\cos x = -2 \sin x \longrightarrow \cos x = -2 \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \longrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

3) **Upravte na jednodušší tvar:** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Využijeme vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

dosadíme

$$A^2 - B^2 \qquad (A+B)(A-B)$$

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x)}{\cancel{1+\cos x}} = 1 - \cos x$$

4) **Upravte na jednodušší tvar:** $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{\cos x+1}{\sin x}$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Nejprve převedeme na společného jmenovatele:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x+1}{\sin x} = \frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}+2\cos x+1}{\sin x\,(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{1+2\cos x+1}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{2+2\cos x}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{2\cancel{(1+\cos x)}}{\sin x\,\cancel{(1+\cos x)}} = \frac{2}{\sin x}$$

Odkazy:

- POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha : Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8. s. 608.
- JIRÁSEK, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU 1. část.* Dotisk 5. vydání.Praha : Prométheus, 1986. ISBN 80-85849-55-0 (*D)