INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola strojnická Olomouc, tř.17. listopadu 49

Výukový materiál zpracovaný v rámci projektu „Výuka moderně“
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0205

Šablona: III/2 Přírodovědné předměty

Sada: 3 Matematika **Číslo materiálu v sadě: 19**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Název: Goniometrické rovnice

Jméno autora: Mgr. Jana Masaryková

Předmět: matematika

Jazyk: čeština

Klíčová slova: goniometrické rovnice, kořen, argument, sinus, kosinus, tangens, kotangens, jednotková kružnice

Cílová skupina: žák

Stupeň a typ vzdělání: odborné vzdělání

Očekávaný výstup: Pozná a umí řešit goniometrické rovnice

Metodický list/anotace

Vytvořeno 14.12.2012

Prezentace je zaměřená na řešení goniometrických rovnic. Je určená k přímé výuce i samostudiu.

Goniometrické rovnice

Rovnice v nichž se vyskytují goniometrické výrazy s neznámou $x \in R$ nazýváme goniometrické rovnice

Vzhledem k tomu, že jsou goniometrické funkce periodické, mohou mít goniometrické rovnice nekonečně mnoho kořenů

Každý kořen, pro který platí $0 \leq x \leq 2\pi$ nazýváme základní kořen

Druhy goniometrických rovnic

1) **Základní goniometrické rovnice** - jedná se o rovnice ve tvaru:

   a) $\sin x = a$ nebo $\cos x = a$, kde $a \in \langle -1, 1 \rangle$

   b) $\mathrm{tg}\, x = a$ nebo $\mathrm{cotg}\, x = a$, kde $a \in R$

2) **Složitější goniometrické rovnice** – řešíme zpravidla převedením na základní goniometrické rovnice:

   a) užitím vhodné substituce

   b) užitím vzorců pro goniometrické funkce

Příklady

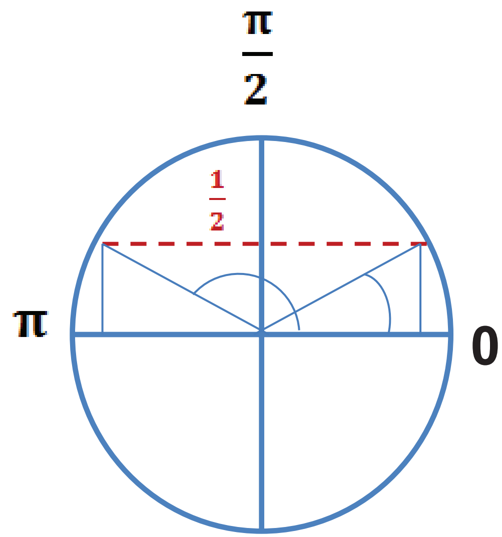
1) Řešte v R rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$

Jak budeme postupovat?

Řešení

Určíme pro danou rovnici dvojici kořenů x_1, $x_2 \in \langle 0, 2\pi)$

funkce sinus nabývá kladných hodnot v intervalech odpovídajících I. a II. kvadrantu $\longrightarrow$ $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $x_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$



Odtud dostáváme kořeny $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

kde $k \in Z$

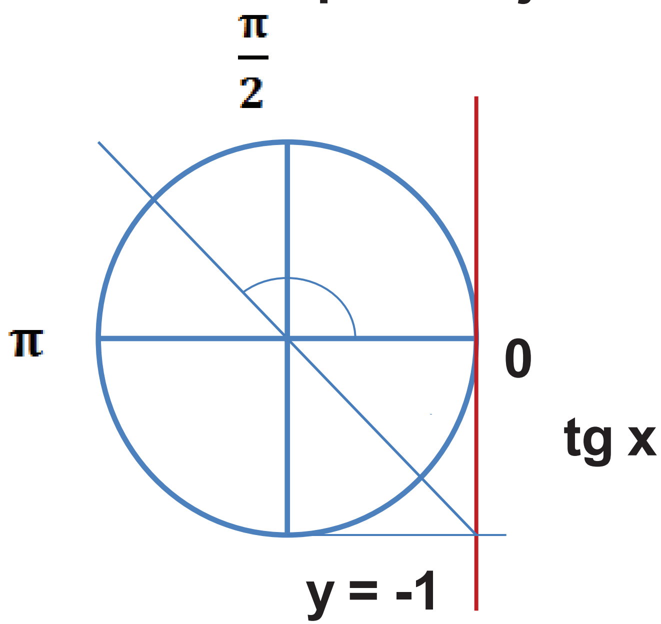
$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

2) **Řešte v R rovnici** **$\mathrm{tg}\, x = -1$**

Jak budeme postupovat?

Řešení

Určíme kořen dané rovnice pomocí jednotkové kružnice



Funkce tangens nabývá záporných hodnot ve II. kvadrantu

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ ⟶ $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ kde $k \in Z$

3) Řešte v R rovnici $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

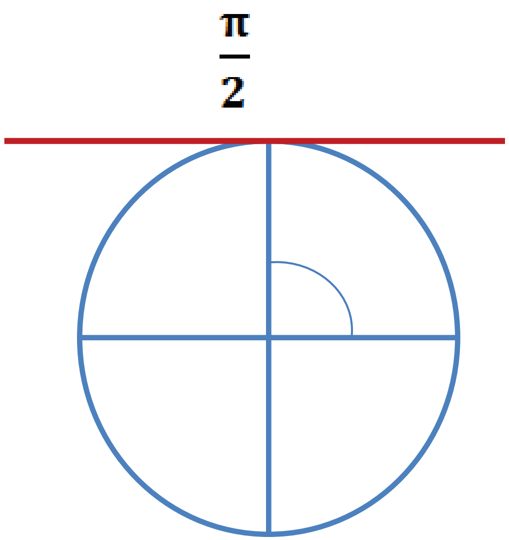
Jak budeme postupovat?

Řešení

nejprve zavedeme substituci: $t = 2x - \frac{\pi}{3}$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \longrightarrow \sin t = 1$

pomocí jednotkové kružnice určíme neznámou t



$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ kde $k \in Z$

vrátíme se zpět k substituci

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

4) Řešte v R rovnici $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Jak budeme postupovat?

Řešení

nejprve zavedeme vhodnou substituci: $t = \sin x$

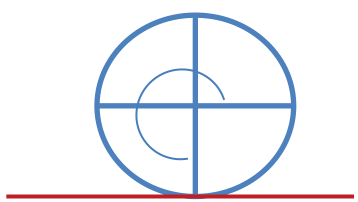
$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \longrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$$

vyřešíme tuto kvadratickou rovnici a dostáváme kořeny:

$t_1 = -1$ a $t_2 = \frac{1}{2}$

vrátíme se zpět k substituci a dosadíme za t získané hodnoty:

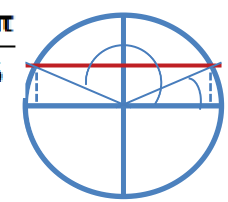
$-1 = \sin x$



$\frac{3\pi}{2}$

$\frac{1}{2} = \sin x$

$\frac{5\pi}{6}$



$\frac{\pi}{6}$

$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

5) Řešte v R rovnici: $2\,(\sin x + 1) = \cos^2 x$

Jak budeme postupovat?

Řešení

nejprve upravíme rovnici pomocí goniometrického vzorce:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$2(\sin x + 1) = \cos^2 x$$

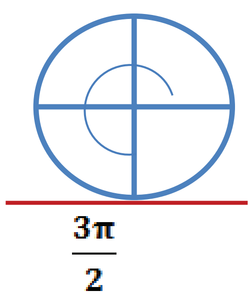
$$2 \sin x + 2 = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 0$$

zvolíme substituci: $t = \sin x$ a dostáváme kvadratickou rovnici:

$t^2 + 2t + 1 = 0 \longrightarrow t = -1$

vrátíme se zpět k substituci a dosadíme za t $\longrightarrow \sin x = -1$



$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Odkazy:

- POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha : Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8. s. 608.
- JIRÁSEK, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU 1. část.* Dotisk 5. vydání.Praha : Prométheus, 1986. ISBN 80-85849-55-0 (*D)