



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Střední průmyslová škola strojnická Olomouc, tř.17. listopadu 49**

**Výukový materiál zpracovaný v rámci projektu „Učíme moderně“  
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0205**

**Šablona: III/2 - matematika**

**Sada: 3**

**Číslo materiálu v sadě: 20**

**Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky**

*Název: Řešení obecného trojúhelníku*

*Jméno autora: Mgr. Jana Masaryková*

*Předmět: matematika*

*Jazyk: čeština*

*Klíčová slova: sinová a kosinová věta, vnitřní úhel, strana trojúhelníku*

*Cílová skupina: žák*

*Stupeň a typ vzdělání: odborné vzdělání*

*Očekávaný výstup: Poznává a umí řešit obecný trojúhelník*

*Metodický list/anotace*

*Datum vytvoření: 19.12. 2012*

**Prezentace je zaměřená na řešení obecného trojúhelníku. Je určena k přímé výuce i samostudiu.**

# Řešení obecného trojúhelníku

## **Řešit trojúhelník**

znamená ze zadaných prvků určit zbývající strany a úhly

Při řešení obecného trojúhelníku se užívá

tzv. trigonometrických vět,

z nichž nejvýznamnější je **věta sinová** a **kosinová**

## Věta sinová

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a vnitřní úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

kde  $r$  je poloměr kružnice opsané trojúhelníku, neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

tj. poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí příslušných protilehlých úhlů

## Věta kosinová

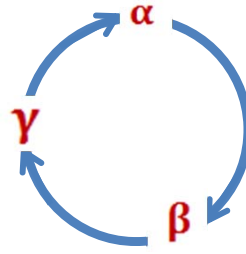
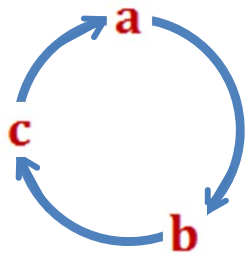
Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a vnitřní úhly mají velikost  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

POZN. Ze vzorce vyjadřující sinovou resp. kosinovou větu lze určit zbývající dva vzorce pomocí tzv. **cyklické záměny**



## Přehled řešení trojúhelníku daného stranami a vnitřními úhly daných velikostí

<u>dané prvky trojúhelníku</u>	<u>způsob řešení</u>
• délka jedné strany a velikosti dvou úhlů ( <i>usu</i> ) resp. ( <i>suu</i> )	sinová věta
• délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich ( <i>ssu</i> )	sinová věta
• délky všech tří stran ( <i>sss</i> )	kosinová věta
• délky stran a velikost úhlu jimi sevřeného ( <i>sus</i> )	kosinová věta



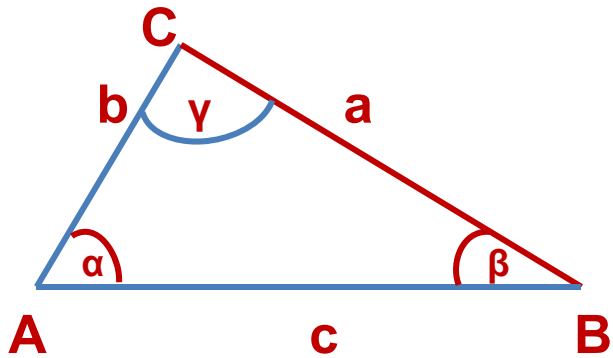
## Příklady:

- 1) Určete délky zbývajících stran a velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:

$$a = 20 \text{ cm}, \alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$$

**Jak budeme postupovat?**

## Řešení



$$a = 20 \text{ cm}, \alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$$

nejdříve pomocí sinové věty vypočítáme stranu b a úhel  $\gamma$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \rightarrow b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = \frac{20}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 30^\circ \cong 14,14 \text{ cm}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ \rightarrow \gamma = 105^\circ$$

nyní vypočítáme pomocí sinové věty stranu c

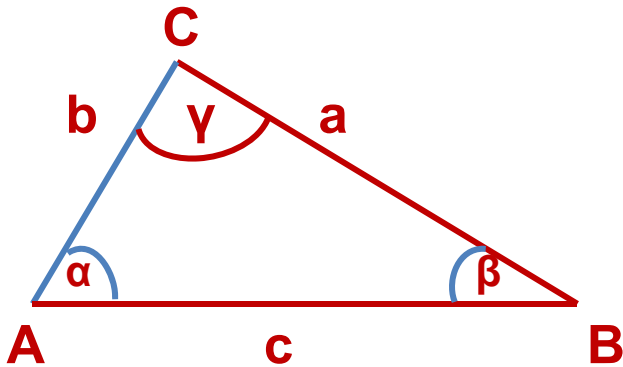
$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma = \frac{20}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 105^\circ \cong 27,32 \text{ cm}$$

**2) Určete délky zbývajících stran a velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:**

$$a = 8,6 \text{ mm}, c = 11,4 \text{ mm}, \gamma = 74^{\circ}20'$$

**Jak budeme postupovat?**

## Řešení



$$a = 8,6 \text{ mm}, c = 11,4 \text{ mm}, \gamma = 74^{\circ}20'$$

nejdříve pomocí sinové věty vypočítáme úhel  $\alpha$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin \gamma = \frac{8,6}{11,4} \cdot \sin 74^{\circ}20' \cong 0,726$$

$$\alpha \cong 46^{\circ}35'$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} \longrightarrow \beta = 180^{\circ} - 46^{\circ}35' - 74^{\circ}20' \longrightarrow \beta = 59^{\circ}05'$$

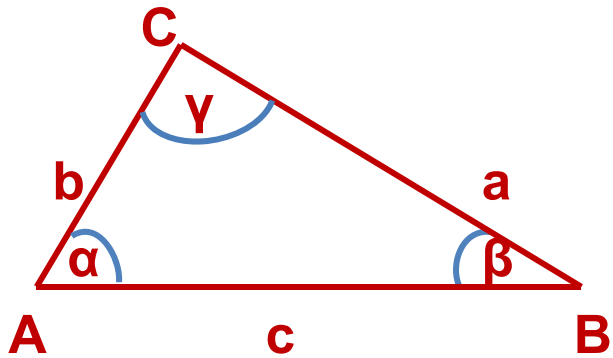
nyní spočítáme pomocí sinové věty zbývající stranu  $b$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = \frac{8,6}{\sin 46^{\circ}35'} \cdot \sin 59^{\circ}05' \cong 10,2 \text{ mm}$$

**3) Určete délky zbývajících stran a velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:**

$$a = 2,6 \text{ dm}, b = 2,4 \text{ dm}, c = 1,8 \text{ dm}$$

**Jak budeme postupovat?**



## Řešení

$$a = 2,6 \text{ dm}, b = 2,4 \text{ dm}, c = 1,8 \text{ dm}$$

pomocí kosinové věty spočítáme nejprve úhel  $\alpha$  a následně úhel  $\beta$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2,4^2 + 1,8^2 - 2,6^2}{2 \cdot 2,4 \cdot 1,8} \cong 0,26$$

$$\alpha = 74^\circ 58'$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{2,6^2 + 1,8^2 - 2,4^2}{2 \cdot 2,6 \cdot 1,8} \cong 0,45$$

$$\beta = 63^\circ 04'$$

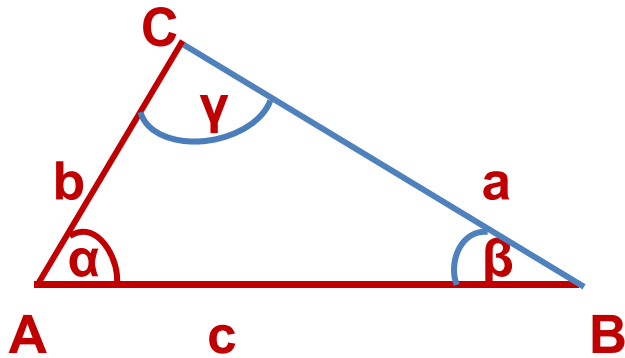
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ - 74^\circ 58' - 63^\circ 04' \rightarrow \gamma = 41^\circ 58'$$

**4) Určete délky zbývajících stran a velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:**

$$b = 29,3 \text{ cm}, c = 64,1 \text{ cm}, \alpha = 48^{\circ}20'$$

**Jak budeme postupovat?**

## Řešení



$$b = 29,3 \text{ cm}, c = 64,1 \text{ cm}, \alpha = 48^\circ 20'$$

pomocí kosinové věty spočítáme nejprve stranu a, pak např. úhel  $\beta$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = 29,3^2 + 64,1^2 - 2 \cdot 29,3 \cdot 64,1 \cdot \cos 48^\circ 20'$$

$$a^2 \cong 2470,2 \longrightarrow a \cong 49,7 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \longrightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{49,7^2 + 64,1^2 - 29,3^2}{2 \cdot 49,7 \cdot 64,1}$$

$$\cos \beta \cong 0,898 \longrightarrow \beta \cong 26^\circ 08'$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \gamma = 180^\circ - 48^\circ 20' - 26^\circ 08' \quad \gamma = 105^\circ 32'$$



## Odkazy:

- *POLÁK, J. Přehled středoškolské matematiky. 8. vyd. Praha : Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8. s. 608.*
- *ODVÁRKO, Oldřich. Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 3.část. dotisk 5.vydání. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-039-X.*